



## ESTUDIO NUMÉRICO DE LA CONVECCIÓN NATURAL EN UNA CAVIDAD CUADRADA EN 2-D CON INTERFASE FLUIDO-MEDIO POROSO Y GENERACIÓN DE CALOR

### NUMERICAL STUDY OF NATURAL CONVECTION IN A 2-D SQUARE CAVITY WITH FLUID-POROUS MEDIUM INTERFACE AND HEAT GENERATION

H. Jiménez-Islas<sup>1\*</sup>, M. Calderón-Ramírez<sup>1</sup>, J.L. Navarrete-Bolaños<sup>1</sup>, J.E. Botello-Álvarez<sup>1</sup>, G.M. Martínez-González<sup>1</sup> y F. López-Isunza<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Ingeniería Química-Bioquímica. Instituto Tecnológico de Celaya. Ave. Tecnológico y A. García Cubas s/n. Celaya, Gto. CP 38010

<sup>2</sup> Departamento de Ingeniería de Procesos e Hidráulica, Universidad Autónoma Metropolitana. C.P. 09340 Iztapalapa, México D.F., México

Recibido 19 de Noviembre 2008; Aceptado 8 de Julio 2009

#### Resumen

Se estudió numéricamente el fenómeno de convección natural bidimensional en una cavidad cuadrada que contiene dos regiones horizontales formadas por un fluido homogéneo y un medio poroso isótropo, el cual presenta generación de calor. Para la modelación, se utilizó el enfoque de dominio simple con un parámetro binario para que las ecuaciones de momentum y de energía tengan validez en todo el dominio. Las ecuaciones de transporte se discretizaron mediante colocación ortogonal y el sistema de ecuaciones algebraicas que se genera se resuelve con el método de Newton. Las simulaciones se hicieron para números de Rayleigh entre  $10^3$  y  $10^6$ ; para valores de la fuente de calor ( $S_0$ ) de 0, 10, 30 y 50; para números de Darcy de  $10^{-4}$ ,  $10^{-6}$  y  $10^{-8}$  y para posiciones de la interfase medio poroso-fluido entre  $0 \leq Y_p \leq 1$ , considerando el número de Prandtl igual a 0.71, analizando su efecto sobre las líneas de flujo, isotermas y el número de Nusselt. Además, se comparó este método con resultados publicados previamente, obteniendo buena concordancia. Los resultados indican que el enfoque de dominio simple es una buena aproximación para predecir el flujo entre las dos fases, sin la necesidad de especificar condiciones interfaciales.

*Palabras clave:* interfase fluido-medio poroso, colocación ortogonal, enfoque de un solo dominio.

#### Abstract

A numerical study was performed regarding two-dimensional natural convection in a square cavity that contains two horizontal regions formed by a homogeneous fluid and an isotropic heat-generating porous medium. The one-domain formulation was used for developing the mathematical model, with a binary parameter so as to the momentum and energy equations were valid throughout the domain. The governing equations were discretized using orthogonal collocation and the set of algebraic equations generated is solved via Newton method. The simulations were performed for Rayleigh numbers among  $10^3$  and  $10^6$ ; for values of the dimensionless heat source ( $S_0$ ) of 0, 10, 30, and 50; Darcy numbers of  $10^{-4}$ ,  $10^{-6}$ , and  $10^{-8}$  and for positions of the porous medium-fluid interface between  $0 \leq Y_p \leq 1$ , considering the Prandtl number equals to 0.71, to assess their effect on the streamlines, isotherms and Nusselt number. In addition, this method was compared with previously published reports with good agreement. The results indicate that the one-domain formulation is a good approximation for predicting the flow between the two phases without the requirement to specify interfacial conditions.

*Keywords:* fluid-porous medium interface, orthogonal collocation, one-domain approach.

#### 1. Introducción

El problema de la convección natural en un sistema cerrado que contiene un medio poroso con un espacio superior constituido por un fluido

homogéneo, ha sido de gran interés, debido a las numerosas aplicaciones en las que incide, como son: almacenamiento de granos en silos (Jiménez Islas y col., 2004), procesos de secado, reactores empacados, estudios geotérmicos, entre otras.

\* Autor para la correspondencia. E-mail: hugo@itc.mx  
Tel. +52 (461) 611-75-75

Debido a esta razón, varios investigadores han analizado los efectos de las fuerzas de flotación y la transferencia de calor en cavidades que contienen dos regiones (fluido y medio poroso), tanto en posición horizontal como vertical. Beckermann y col. (1987) presentan un análisis teórico-experimental de la convección natural en una cavidad con dos capas de fluido y medio poroso respectivamente, colocadas en posición vertical. El flujo dentro del lecho se modeló mediante las ecuaciones de la ley de Darcy y la extensión de Brinkman-Forchheimer. Estos autores proponen un modelo matemático que tiene validez para todo el dominio, utilizando un parámetro binario que adquiere los valores de 1 ó 0, dependiendo si la discretización se hace en el medio poroso o en el fluido. Se encontró que la cantidad de penetración del fluido desde la región libre hasta el lecho poroso depende en gran medida de los números de Darcy ( $Da$ ) y Rayleigh ( $Ra$ ) para el fluido. Por otro lado, Singh y col. (1993), reportan un estudio de la convección natural 3-D en una cavidad con regiones medio poroso-fluido colocado en posición horizontal. En este caso, los autores plantean las ecuaciones de transporte para cada región, empleando como ecuación de momentum para el medio poroso a la ley de Darcy con la extensión de Brinkman. El acoplamiento de los modelos en la interfase fluido-medio poroso se hace utilizando las continuidades del campo y del flux para las velocidades, esfuerzos y temperaturas. Nield y Bejan (1999) presentan varios sistemas geométricos birregionales, donde se emplea la ley de Darcy y la formulación empírica de Beavers y Joseph (1967) para acoplar los modelos. Ochoa Tapia y Whitaker (1995) han propuesto una condición de salto para acoplar la ley de Darcy con la extensión de Brinkman a la ecuación de Stokes, obteniendo un campo de velocidad promedio el cual es continuo entre las dos fases. Se han realizado análisis de equivalencia entre el enfoque de dominio simple y doble, y así evitar el uso de una condición de frontera en la interfase (Hirata y col., 2009).

### 1.1 Ley de Darcy y extensión de Brinkman

La utilización de la Ley de Darcy implica que en las fronteras del sistema existe deslizamiento, ya que este modelo carece de términos difusivos que expliquen la distorsión de los perfiles de velocidad en las proximidades de una frontera sólida. Para solventar esta situación, Brinkman (1947) sugirió que a la ley de Darcy se le podría adicionar un término de segundo orden  $\mu_{eff}\nabla^2v$ , que representa las pérdidas de energía por transporte viscoso, por lo que ahora se toma en cuenta la distorsión de los perfiles de velocidad en las proximidades de una pared impermeable y rígida. Se ha reportado buena concordancia con resultados experimentales cuando se considera  $\mu = \mu_{eff}$  (Gobin y col., 1998; Goyeau y

col., 2003). Con la extensión de Brinkman, es factible la aplicación de la condición de no-deslizamiento en las paredes, aunque en muchas de las situaciones, como es el caso de los granos y cereales (Jiménez Islas, 1999), el efecto del transporte viscoso es despreciable (medios porosos con número de Darcy  $< 10^{-4}$ ), es conveniente proporcionar un soporte teórico a la ley de Darcy para justificar el uso del criterio de la ausencia de deslizamiento y para el acoplamiento de ecuaciones en la frontera interregional que se presentan en problemas con interfase medio poroso-fluido (Neale y Nader, 1974; Nield y Bejan, 1999).

### 1.2 Interfase fluido-medio poroso

La principal dificultad que se tiene para la modelación matemática de los sistemas con interfase fluido-medio poroso, es la representación de las condiciones de unión en la interregión para acoplar las ecuaciones de Navier-Stokes del fluido con las de la ley de Darcy en la región porosa. La ley de Darcy (Nield y Bejan, 1999) no puede representar matemáticamente la existencia de una región límite en un medio poroso, debido a que carece del término de esfuerzo cortante (Singh y col., 1993), lo que ocasiona que no se pueda considerar la existencia de continuidad en las velocidades tangenciales en la interfase. Para compensar este comportamiento inadecuado, se han propuesto diversas soluciones entre las cuales la más utilizada es la que postula Brinkman (1947) y que se ha descrito anteriormente. Beavers y Joseph (1967), propusieron el uso de un esquema de deslizamiento artificial, que consiste en que los efectos del esfuerzo cortante del fluido, penetrarán en el medio poroso para formar la región de capa límite, considerando que la velocidad de deslizamiento en la región libre es proporcional a un efecto de esfuerzo cortante en la frontera permeable y relacionan esta velocidad en el flujo exterior por la condición de frontera

$$\frac{dv}{dy} = \gamma(v_B - v) \quad (1)$$

En donde  $\gamma$  es un parámetro que depende de la viscosidad del fluido, de la permeabilidad del material y de valores que caracterizan la interregión del material permeable. Se sugiere que  $\gamma$  puede escribirse como  $\alpha(K)^{1/2}$ , donde  $\alpha$  es una cantidad adimensional que depende del material de la región permeable y  $K$  es la permeabilidad del medio poroso (Valencia-López y col., 2003). La propuesta de Beavers y Joseph (1967) ha tenido un impacto científico relevante ya que, a la fecha, cuenta con más de 600 citas (*Citation Index*).

En resumen, el diseño de las ecuaciones de transporte en una cavidad formada por una bicapa fluido-medio poroso, se hace de dos maneras: Modelo de dos dominios y modelo de un solo dominio (Deng y Martínez, 2005). La descripción de ambos métodos se encuentra en la Tabla 1. En la

mayoría de las situaciones, es de esperarse que se obtengan resultados equivalentes por cualquiera de los dos métodos anteriormente descritos, lo que es demostrado en este trabajo. Para el modelo de dos dominios, Ochoa-Tapia y Whitaker (1995, 1997) han propuesto una alternativa rigurosa para el acoplamiento de ecuaciones en la interfase fluido-medio poroso, conocida como *condición de salto* en el esfuerzo cortante, que es inversamente proporcional a la permeabilidad del medio poroso, que requiere de la constante empírica  $\gamma$  desconocida (Alazmi y Vafai, 2001; Valencia López y col., 2003; Deng y Martínez, 2005). En el caso de la ecuación de energía, el acoplamiento en la interregión queda especificado mediante la continuidad del campo y del flux. Con esto se relaciona la temperatura puntual de la región que corresponde al fluido con la temperatura promedio en la región porosa. Algunos avances sobre el cálculo del coeficiente de salto  $\gamma$  han sido reportados por Ochoa-Tapia y Whitaker (1995) quienes emplearon el Método del Promedio volumétrico para calcular la dependencia geométrica de  $\gamma$  como una función compleja de las variables de

cerradura, que requiere un conocimiento detallado de la microestructura de la interregión fluido-medio poroso. Goyeau y col. (2003) han propuesto la existencia de una capa no homogénea en la interregión, de tal manera que  $\gamma$  es una función explícita de las variaciones de la velocidad y de las propiedades efectivas de la capa de transición. Deng y Martínez (2005) estiman el coeficiente de salto a partir de una comparación entre el método de dos dominios y el de un solo dominio; sus resultados indican que  $\gamma$  es una función de  $Ra$  y de  $Da$ . Valdés-Parada y col. (2006) analizaron la transferencia de masa entre un fluido homogéneo y un catalizador poroso, demostrando que el coeficiente de la función de salto es una función de la microestructura del medio poroso (Chandesris y Jamet, 2006, Hirata y col. 2007) y del módulo de Thiele. Como se puede inferir, el cálculo del coeficiente  $\gamma$  es aún muy complejo y depende fuertemente de la estructura del medio poroso, por lo que los métodos aproximados para modelar y resolver este tipo de problemas son apropiados, más aún cuando el medio poroso es de origen biológico.

Tabla 1. Métodos de representar matemáticamente la convección natural en una cavidad que contiene dos capas de fluido y medio poroso, respectivamente.

Método	Características	Variantes
Modelo de dos dominios	Se proponen las ecuaciones de transporte para cada región y, posteriormente se acoplan en la interfase, usando condiciones de unión	Si se utiliza la ley de Darcy, se emplea las condiciones tipo Beavers y Joseph (o sus variantes) para acoplar las velocidades tangenciales.
	De un sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales (EDP), se incrementa a resolver un sistema de cinco (ley de Darcy) o seis ecuaciones (Ley de Darcy con extensión de Brinkman), que conlleva a mayor esfuerzo computacional.	Si se emplea la ley de Darcy con la extensión de Brinkman (O alguna variante: e.g. extensión de Forchheimer (Nield y Bejan, 1999), ya se satisface la continuidad en velocidades y esfuerzos en la interfase.
	Mayor representatividad del sistema físico.	Si se emplean condiciones de salto es necesario, en principio, conocer el orden de magnitud del parámetro involucrado.
Modelo de un solo dominio	Se propone un modelo único para todo el dominio, adecuándolo de tal manera que tenga validez tanto en el fluido como en el medio poroso. En este caso no se requieren establecer condiciones de unión en la interfase.	El fluido es considerado como un caso especial de un medio poroso. En esta situación, se debe adecuar la ecuación de momentum de tal manera que tenga validez en todo el dominio., proponiendo la variación espacial de la permeabilidad (Gobin y col., 1998; Basu y Khalili, 1999).
	Se resuelve un sistema de tres EDP y, por lo tanto, se simplifica la solución numérica.	Otra manera es proponer una combinación de las ecuaciones de transporte para el fluido y para el medio poroso, utilizando un parámetro binario que adquiere los valores de 0 ó 1, para reducir el modelo a las ecuaciones de Navier-Stokes o a la ecuación de momentum en el medio poroso. Si se utiliza la ley de Darcy con extensión de Brinkman, se asegura continuidad en velocidades y esfuerzos. (Deng y Martínez, 2005; Gobin y Goyeau, 2008; Hirata y col., 2009)
	Es una aproximación del comportamiento real que ha dado buenos resultados, que va mejorando su precisión a medida que se incrementa el malleo en la región de la interregión fluido-medio poroso.	

1.3 Enfoque de dominio simple

La formulación de dominio simple es una aproximación que ha sido estudiada con buenos resultados por diversos autores (Gobin y col., 1998; Basu y Khalili, 1999; Goyeau y col., 2003; Deng y Martinez, 2005; Gobin y col., 2005; Hirata y col., 2006; Gobin y Goyeau, 2008) y consiste en la construcción de modelos matemáticos que sean válidos en las dos regiones sin tomar en cuenta explícitamente la interregión; adecuando la ecuación de momentum de tal manera que tenga validez en todo el dominio, proponiendo la variación espacial de la permeabilidad (Gobin y col., 1998; Basu y Khalili, 1999). Otra forma es construir el modelo matemático combinando las ecuaciones de transporte para las dos regiones, en donde sus propiedades están definidas mediante la inclusión de un parámetro  $M_p$  que adquiere el valor de 1 si se está analizando el dominio de la matriz porosa ó 0 si se está analizando el dominio que corresponde al fluido homogéneo (Beckermann y col. 1987). Este enfoque asegura la satisfacción de las condiciones de acoplamiento de la interregión (utilizando como ecuación de momentum para el medio poroso la ley de Darcy con la extensión de Brinkman), por lo que se simplifica el proceso de solución numérica (Gobin y col., 1998; Deng y Martinez, 2005; Gobin y Goyeau, 2008) y no se requiere de conocer el valor del coeficiente  $\gamma$  de la condición de salto. Este enfoque es el que se utilizará en este trabajo para estudiar numéricamente la convección natural en una cavidad que contiene un medio poroso con generación de calor y un espacio superior ocupado por un fluido, empleando datos cuyo orden de magnitud está relacionado con una de las aplicaciones de este problema, que es el estudio del almacenamiento de granos en silos.

1.4 Ecuaciones de transporte

Las ecuaciones de transporte para un fluido en régimen laminar, homogéneo, newtoniano, incompresible y en estado estable son (Bird y col., 2002):

Continuidad: 
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{2}$$

Momentum: 
$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \tag{3}$$

Energía: 
$$\rho C_p (\mathbf{v} \cdot \nabla T) = \nabla \cdot (k \nabla T) + Q_0 \tag{4}$$

Por otra parte, las ecuaciones que gobiernan el transporte para un medio bifásico han sido reportadas por Whitaker (1986, 1999), Carbonell y Whitaker (1984) y Thorpe y col. (1991), quienes utilizaron el concepto de propiedades efectivas.

Continuidad: 
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{5}$$

Ley de Darcy con extensión de Brinkman: 
$$\mu \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu_{eff} \nabla^2 \mathbf{v} \tag{6}$$

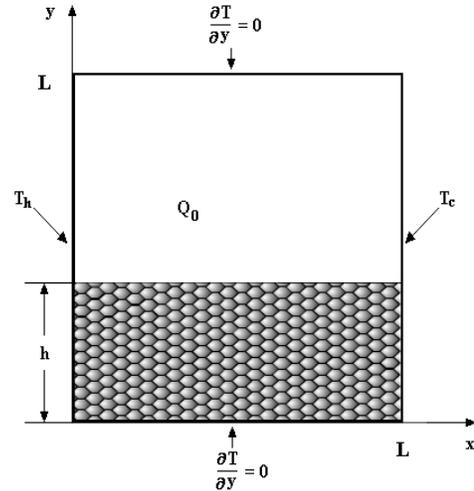


Fig. 1. Sistema geométrico estudiado y sus condiciones de frontera.

Energía:

$$(\rho C_p) \nabla \cdot (\mathbf{v} T) = \mathbf{K} : \nabla \nabla T + Q_0 \tag{7}$$

En las expresiones (5) a (7) las variables son del tipo volumétricamente promediadas, reportadas por Carbonell y Whitaker (1984) y por Whitaker (1986) aunque se ha utilizado por conveniencia la notación para variables puntuales.

2. Modelo matemático

El problema de estudio consistió en una cavidad cuadrada de dimensión  $L$  calentada diferencialmente, que contiene un medio poroso hasta una altura  $h$ , tal como se ilustra en la Fig. 1. La matriz porosa está saturada y presenta una tasa constante de generación volumétrica de calor. En la parte superior del medio poroso se encuentra una región de espesor  $L-h$ , que contiene un fluido homogéneo. La fuente de calor, junto con los gradientes de temperatura que se manifiestan en las fronteras del sistema inducirá el movimiento del fluido dentro de la cavidad. Con el fin de acoplar adecuadamente las velocidades y los esfuerzos en la interfase fluido- medio poroso, se utilizó como ecuación de momentum para la región porosa a la ley de Darcy con la extensión de Brinkman (Singh y col., 1993). Para obtener el modelo correspondiente al sistema geométrico en cuestión se hicieron las consideraciones siguientes:

- 1) Medio efectivo, isotrópico, con propiedades constantes donde la viscosidad y la densidad corresponden a la del fluido y la conductividad térmica es la efectiva del medio poroso. Además, se utilizó la aproximación de Boussinesq (Nield y Bejan, 1999).
- 2) Es una cavidad con fronteras rígidas e impermeables y, por lo tanto, no se presenta deslizamiento.
- 3) El fluido es aire y el medio poroso presenta una conductividad efectiva seis veces mayor que la del aire ya que se tomó como ejemplo, la

conductividad térmica efectiva que presentan los granos (Jiménez Islas y col., 1996). Además, la tasa de generación de calor  $Q_0$  es constante. El efecto del aspecto geométrico de la cavidad y la razón de conductividades térmica fluido – medio poroso no se han incluido en este estudio para deslindar los efectos convectivos y de la fuente de calor que son los más importantes para aplicaciones agroindustriales.

- 4) Se considera un modelo matemático combinado que represente tanto a la región porosa como a la región con el fluido, mediante la utilización de un parámetro binario  $M_p$ , que adquirirá los valores de 1 ó 0, dependiendo si el análisis se está efectuando en el medio poroso o en el fluido, respectivamente.

Con estas restricciones, se procedió a la adimensionalización de las ecuaciones de transporte, seguida de diferenciación cruzada de la ecuación de cantidad de movimiento para eliminar el término  $\nabla p$ . Por último, con el empleo de las definiciones de función corriente  $\phi$  y vorticidad  $\omega$  (Roache, 1972) y la combinación de las ecuaciones del fluido y del medio poroso con la correspondiente inclusión del parámetro binario  $M_p$ , se obtiene el modelo matemático (de un solo dominio) siguiente:

Vorticidad:

$$\omega = \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \quad (8)$$

Momentum:

$$(1 - M_p) \left[ \frac{\partial \phi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \phi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right] = - \frac{M_p Pr}{Da} \omega + Pr \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right] + Ra Pr \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (9)$$

Energía:

$$\left[ \frac{\partial \phi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \phi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right] = \left[ 1 + M_p (R_k - 1) \right] \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right] + M_p S_0 \quad (10)$$

Con las siguientes condiciones de frontera para la función corriente y temperatura:

$$\text{C.F.1. } X = 0 \quad \phi = 0 \quad \theta = 1 \quad (11a)$$

$$\text{C.F.2. } X = 1 \quad \phi = 0 \quad \theta = 0 \quad (11b)$$

$$\text{C.F.3. } Y = 0 \quad \phi = 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (11c)$$

$$\text{C.F.4. } Y = 1 \quad \phi = 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (11d)$$

Por otra parte, para definir las condiciones frontera para la vorticidad, se utilizó el criterio de Woods (Roache, 1972). El sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) elípticas formado por las ecuaciones (8) a (11), se resolvió por Colocación Ortogonal (CO) (Finlayson, 1980) con polinomios de Legendre, mediante el código computacional denominado NEWCOL2 escrito en FORTRAN 90 (Jiménez Islas y López Isunza, 1996). Las

ecuaciones discretizadas se resolvieron mediante el método de Newton modificado (Ec. (12)) con factorización LU, utilizando diferencias finitas para aproximar las derivadas parciales de la matriz jacobiana. El vector de aproximación inicial fue  $V^0 = [0, 0, 0]^T$ , el factor de amortiguamiento para el método de Newton ( $\lambda$ ) fue de 1 ó 0.5 y el criterio de convergencia utilizado se muestra en la Ec. (13).

$$V^{i+1} = V^i - \lambda J_i^{-1} F_i \quad (12)$$

$$|F_i| \leq 10^{-5} \quad \text{Para } 1 \leq i \leq NQ(NX)(NY) \quad (13)$$

En donde:

$V$  = Vector de incógnitas

$F$  = Vector de ecuaciones discretizadas

$J$  = Matriz Jacobiana

$F_i$  = Ecuación discretizada

Las simulaciones se hicieron para números de Rayleigh ( $Ra$ ) entre  $10^3$  y  $10^6$ ; para valores de la fuente adimensional de calor ( $S_0$ ) de 0, 10, 30 y 50 y para números de Darcy ( $Da$ ) de  $10^{-4}$ ,  $10^{-6}$  y  $10^{-8}$ , manteniendo constante la posición adimensional de la interfase fluido-medio poroso ( $Y_p = h/L$ ) a un valor de 0.5 una relación de conductividades entre medio libre/poroso ( $R_k$ ) de 6 y un número de Prandtl ( $Pr$ ) de 0.71 (aire). Además se analizó el efecto de la variación de la posición de la interfase  $Y_p$ . De los resultados de las simulaciones matemáticas, se obtuvieron las gráficas de líneas de flujo y de las isotermas y se calculó el número de Nusselt promedio. Las simulaciones se hicieron en una computadora DELL PRECISION PWS690 Intel® Xeon® CPU E5345 a 2.33 GHz, con 2 Gb de memoria RAM, utilizando Intel Visual FORTRAN<sup>MR</sup> v.10.1.014 para sistema operativo Windows XP®.

### 3. Resultados y discusión

En la Tabla 2 se reportan las simulaciones numéricas para evaluar el efecto del número de Rayleigh, generación adimensional de calor, número de Darcy y posición de la interfase respectivamente, empleando 31x31 puntos de colocación interiores. También se menciona el factor de amortiguamiento y el número de iteraciones de Newton.

Como es de esperarse, los perfiles de temperatura son afectados con el incremento de las fuerzas de flotación (Representadas por el número de Rayleigh  $Ra$  y la generación de calor adimensional  $S_0$ ). El efecto se torna más complicado si se considera la acción combinada de  $Ra$  y  $S_0$ , por lo que se hará un análisis por separado.

#### 3.1 Efecto del número de Rayleigh

En la Fig. 2 se muestra las líneas de flujo, donde se observa que se forma un núcleo de líneas de flujo altos por encima de la interfase, el cual a números de Rayleigh bajos se desplaza ligeramente hacia la pared fría y al aumentar el número de Rayleigh, se desplaza hacia la pared caliente. Este fenómeno está en relación directa al incremento de la relación  $Ra/S_0$

Tabla 2. Valores de  $Ra$ ,  $S_0$ ,  $Da$  y  $Y_p$  empleados en las simulaciones numéricas.

Simulación	$Ra$	$S_0$	$Da$	$Y_p$	Factor $\lambda$	Iteraciones	Tiempo de CPU (s)
1	$10^3$	30	$10^{-6}$	0.50	1.0	5	140
2	$10^4$	30	$10^{-6}$	0.50	1.0	7	196
3	$10^5$	30	$10^{-6}$	0.50	0.5	40	1150
4	$10^6$	30	$10^{-6}$	0.50	0.5	48	1376
5	$10^5$	0	$10^{-4}$	0.50	0.5	37	1068
6	$10^5$	10	$10^{-4}$	0.50	0.5	37	1055
7	$10^5$	30	$10^{-4}$	0.50	0.5	38	1095
8	$10^5$	50	$10^{-4}$	0.50	0.5	47	1359
9	$10^6$	50	$10^{-4}$	0.50	0.5	49	1421
10	$10^6$	50	$10^{-6}$	0.50	0.5	49	1418
11	$10^6$	50	$10^{-8}$	0.50	0.5	53	1530
12	$10^5$	30	$10^{-6}$	0.00	0.5	40	1158
13	$10^5$	30	$10^{-6}$	0.25	1.0	11	312
14	$10^5$	30	$10^{-6}$	0.75	1.0	7	196
15	$10^5$	30	$10^{-6}$	0.90	1.0	5	139
16	$10^5$	30	$10^{-6}$	1.00	1.0	3	82

(Das y Sahoo, 1999; Jue, 2003) y es importante mencionar que a  $Ra = 10^6$ , hay indicios de la formación de flujo bicelular ya que en el caso de  $Y_p = 0$  (aire únicamente), sí se origina esta condición (Saito y Hirose, 1989).

En la Fig. 3, se observa el crecimiento de una región caliente en  $Ra = 10^3$  a  $Ra = 10^5$ , pero para  $Ra = 10^6$ , esta región disminuye, debido a que la intensidad de las fuerzas de flotación (efecto convectivo o advectivo) es tal que aumenta la transferencia de calor hacia el ambiente y por lo tanto, disminuye el tamaño de la región caliente (Kim y Hjun, 2004). Este efecto es el que provoca el desplazamiento primero hacia la pared fría y luego hacia la pared caliente del núcleo de líneas de corriente. También en la Fig. 3 se observa la aparición en el plano  $X = 0$  de una sección en donde el flux de calor invierte su sentido, que va disminuyendo conforme las fuerzas de flotación se hacen más intensas a medida que  $Ra$  se incrementa (Kim y Hjun, 2004). Además, a  $Ra$  elevados (del orden de  $10^9$ ), comienza a aparecer turbulencia, por lo que las ecuaciones de transporte deben modificarse para incluir este fenómeno (Jiménez Islas, 1999).

### 3.2 Efecto de la generación volumétrica de calor

En la Fig. 4 se ilustra el efecto de  $S_0$  sobre las líneas de corriente, observándose la formación de un vórtice cada vez más rápido y que se ubica sobre la interfase. A  $S_0 = 50$  se produce flujo bicelular como consecuencia de la conversión de energía térmica en

energía cinética, debido al efecto de las fuerzas de flotación (Prasad y Chui, 1989). En la Fig. 5 se muestra el efecto de  $S_0$  sobre los perfiles de temperatura, donde se observa que a  $S_0 = 0$ , la distorsión de las isoterma es producida solamente por el gradiente de temperaturas en las fronteras  $X = 0$  y  $X = 1$ . A medida que  $S_0$  aumenta, se va formando una zona caliente en el medio poroso y que también se va haciendo cada vez más grande, llegando hasta la región del fluido, lo que es una consecuencia natural del incremento de la fuente de calor. En la Tabla 3 se aprecia que las simulaciones 5 y 6, la cantidad de calor generado ( $S_0 = 0, 10$ ) está por debajo de la máxima cantidad de calor que puede disipar la pared fría situada en  $X = 1$ , teniendo en mente que el área de disipación es constante, por lo que la  $\theta_{max}$  para cada simulación no cambia. Es de esperarse que, al incrementarse  $S_0$ , existirá un valor crítico, en donde el área de transferencia de la pared fría y, (eventualmente también de la pared caliente cuanto  $S_0$  es alto), no es suficiente para disipar todo el calor generado, por lo que la temperatura máxima comienza a incrementarse. Haciendo unas simulaciones con  $S_0 = 15$ , se obtiene una  $\theta_{max} = 1.000000$  y a  $S_0 = 20$ ,  $\theta_{max} = 1.007676$ . Probando con  $S_0 = 18$ ,  $\theta_{max} = 1.000729$ , por lo que el valor crítico de  $S_0$  está cercano a 18. Una situación análoga ocurre con las simulaciones 12 y 13. Un fenómeno similar fue reportado por Jiménez Islas y col. (1996) en el estudio del efecto del calor de respiración bidimensional en un silo que contiene un medio poroso constituido por grano.

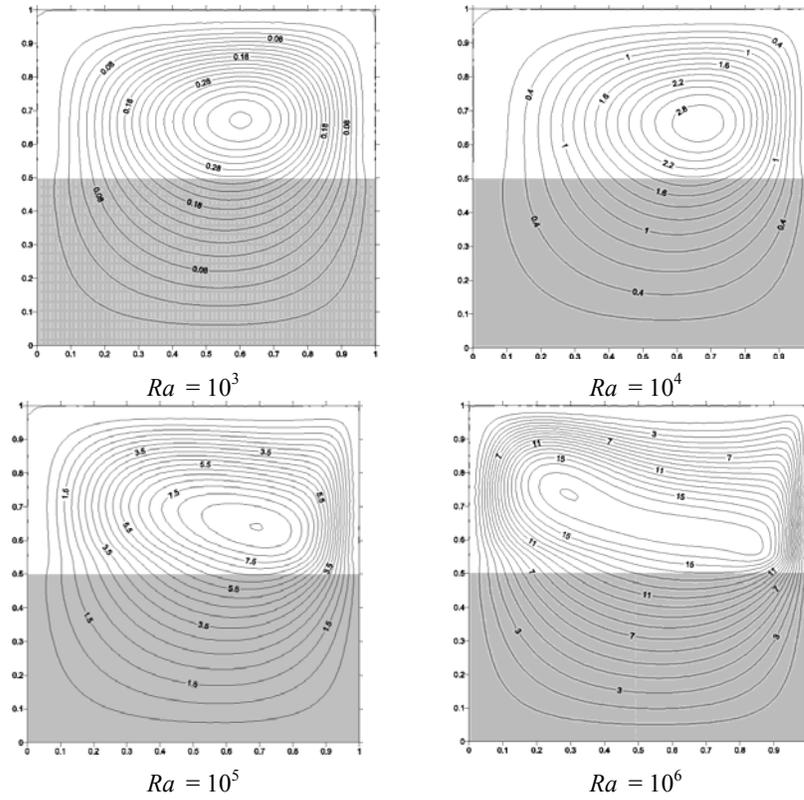


Fig. 2. Efecto del número de Rayleigh sobre las líneas de corriente a  $S_0 = 30$ ,  $Da = 10^{-6}$  y  $Y_p = 0.5$ . Nota: La altura  $Y_p$  corresponde a la región sombreada (medio poroso) en ésta y todas las figuras restantes.

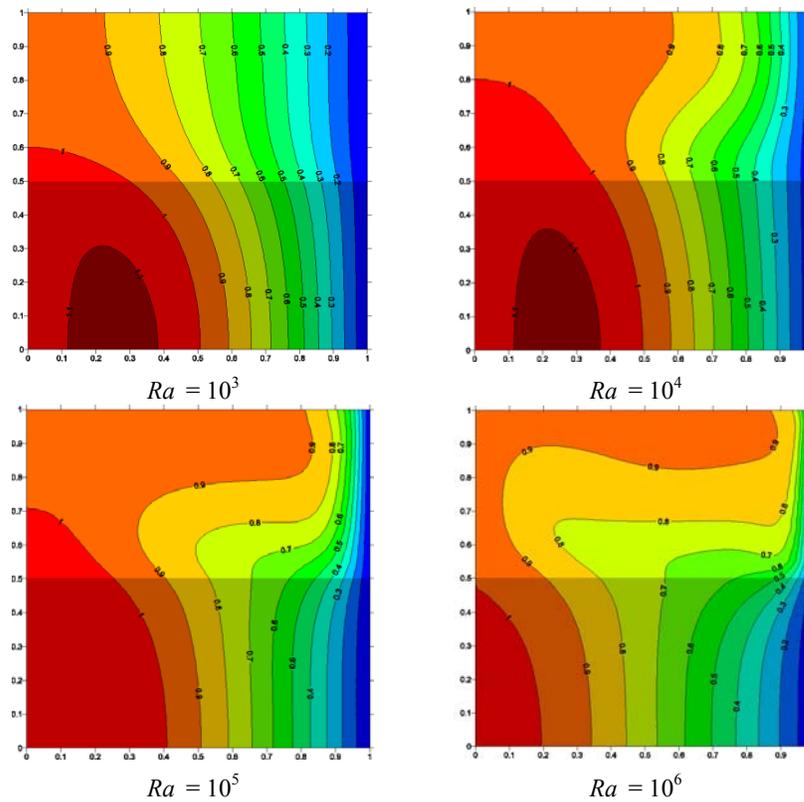


Fig. 3. Efecto del número de Rayleigh sobre las isotermas a  $S_0 = 30$ ,  $Da = 10^{-6}$  y  $Y_p = 0.5$

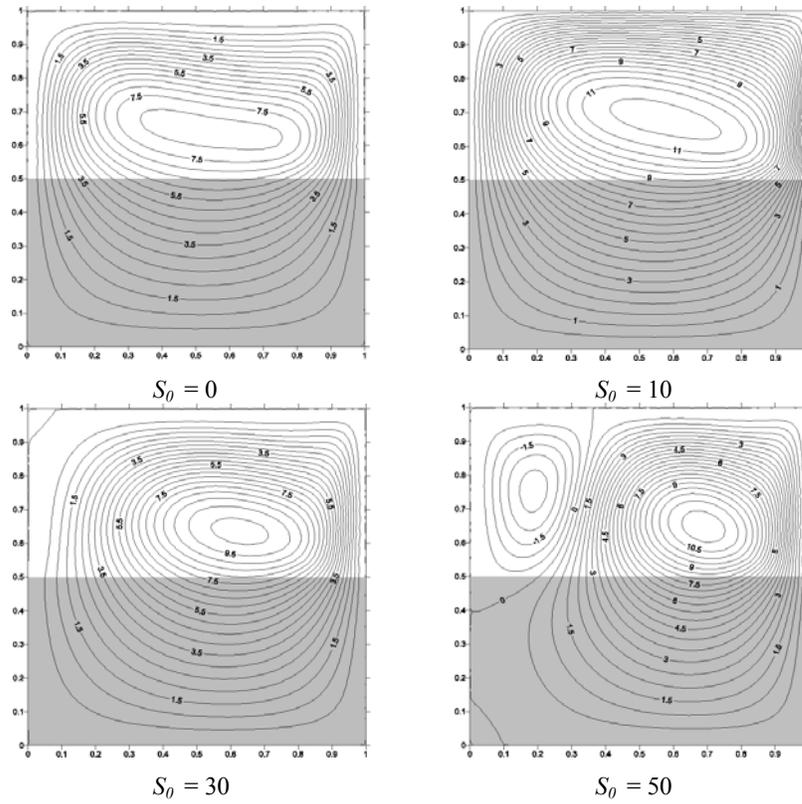


Fig. 4. Efecto de la fuente de calor  $S_0$  sobre las líneas de corriente a  $Ra = 10^5$ ,  $Da = 10^{-4}$  y  $Y_p = 0.5$ .

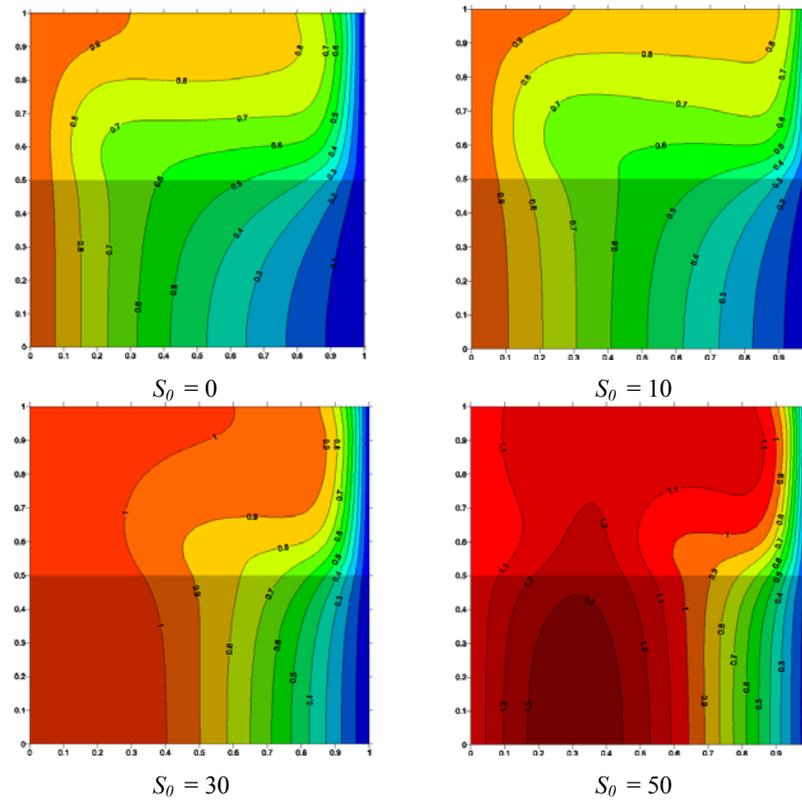


Fig. 5. Efecto de la fuente de calor  $S_0$  sobre las isotermas a  $Ra = 10^5$ ,  $Da = 10^{-4}$  y  $Y_p = 0.5$ .

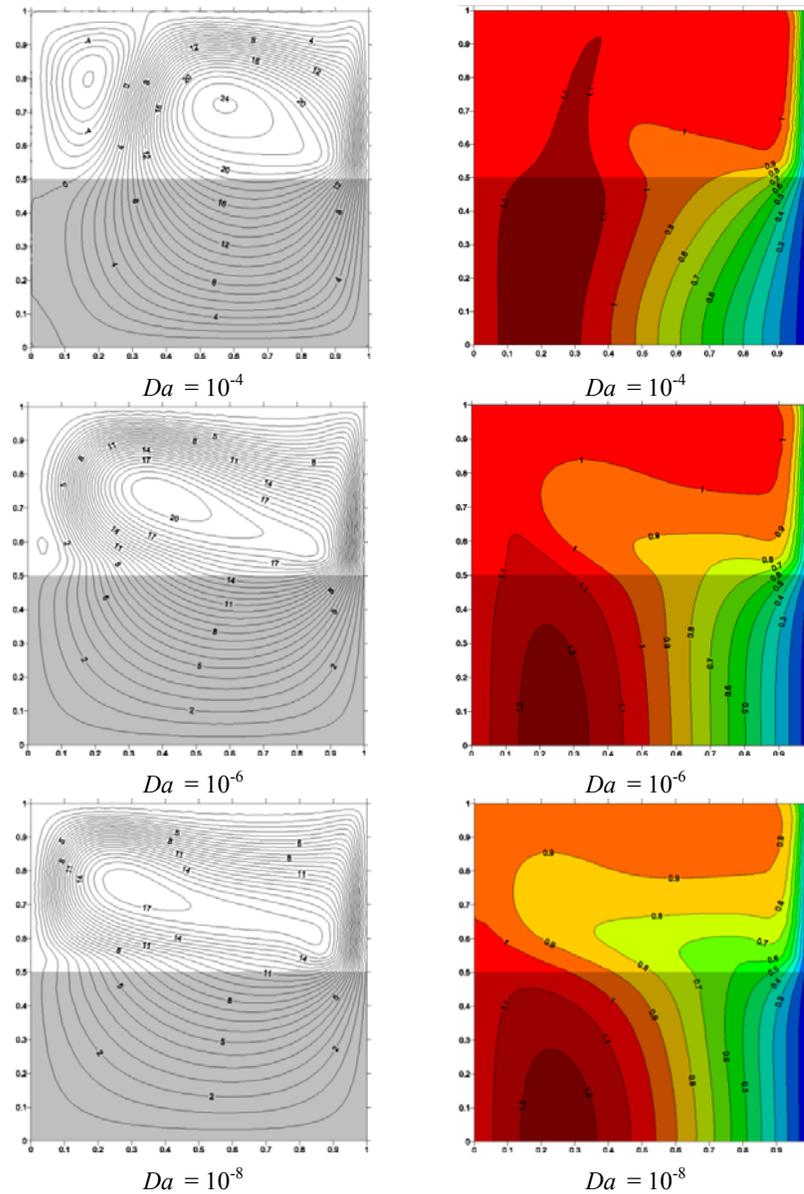


Fig. 6. Efecto del número de Darcy sobre las líneas de corriente e isothermas a  $Ra = 10^6$ ,  $S_0 = 50$  y  $Y_p = 0.5$ .

### 3.3 Efecto del número de Darcy

El efecto del número de Darcy sobre las líneas de corriente y las isothermas se muestra en la Fig. 6, donde se visualiza que a  $Da = 10^{-4}$ , se forma flujo bicelular, condición que va atenuándose paulatinamente al disminuir  $Da$ , debido a que el medio poroso ofrece cada vez mayor resistencia al paso de fluido intersticial. En el caso de las isothermas, la región caliente se incrementa a medida que  $Da$  decrece, debido a que cada vez se utiliza menos energía para convertirse en energía cinética (flujos multicelulares) en la región porosa tiende hacia un fenómeno puramente conductivo, mientras que en el fluido, la transferencia de calor es dominada por la convección (Singh y col., 1993). Es importante mencionar que a  $Da < 10^{-6}$ , el medio

poroso tiende a un comportamiento prácticamente darciano (Jiménez Islas y col., 1999).

### 3.4 Efecto de la posición de la interfase

En la Fig. 7 se ilustra el efecto de la posición de la interfase fluido-medio poroso sobre las líneas de corriente. Cuando se tiene únicamente aire en la cavidad, se forma flujo multicelular y a medida que la altura  $Y_p$  de la región porosa aumenta, primero se pierde la condición de flujo multicelular y luego, se vuelve a recuperar a  $Y_p \geq 0.75$  en forma de una segunda célula de flujo mucho más lenta y de sentido contrario. La magnitud de las líneas de corriente va disminuyendo a medida que aumenta  $Y_p$ , lo que es consecuencia de la resistencia al flujo que ofrece el

Tabla. 3. Temperatura máxima  $\theta_{max}$ , temperatura promedio  $\theta_{med}$  y número de Nusselt promedio  $Nu_{med}$  para las simulaciones numéricas efectuadas

Simulación	$Ra$	$S_0$	$Da$	$Y_p$	$\theta_{max}$	$\theta_{med}$	$Nu_{med}$
1	$10^3$	30	$10^{-6}$	0.50	1.137	0.733	16.588
2	$10^4$	30	$10^{-6}$	0.50	1.136	0.797	14.820
3	$10^5$	30	$10^{-6}$	0.50	1.094	0.808	15.303
4	$10^6$	30	$10^{-6}$	0.50	1.022	0.750	19.181
5	$10^5$	0	$10^{-4}$	0.50	1.000	0.599	8.273
6	$10^5$	10	$10^{-4}$	0.50	1.000	0.624	13.781
7	$10^5$	30	$10^{-4}$	0.50	1.095	0.840	14.357
8	$10^5$	50	$10^{-4}$	0.50	1.376	1.016	17.336
9	$10^6$	50	$10^{-4}$	0.50	1.176	0.928	21.211
10	$10^6$	50	$10^{-6}$	0.50	1.239	0.909	20.678
11	$10^6$	50	$10^{-8}$	0.50	1.245	0.846	23.278
12	$10^5$	30	$10^{-6}$	0.00	1.000	0.499	9.032
13	$10^5$	30	$10^{-6}$	0.25	1.000	0.622	17.099
14	$10^5$	30	$10^{-6}$	0.75	1.196	0.896	18.401
15	$10^5$	30	$10^{-6}$	0.90	1.215	0.890	21.949
16	$10^5$	30	$10^{-6}$	1.00	1.225	0.915	22.982

medio poroso. A  $Y_p = 1$ , el flujo es muy lento ya que la cavidad está completamente ocupada por el medio poroso.

El efecto sobre las isothermas se muestra en la Fig. 8, donde se visualiza que el efecto convectivo va disminuyendo a medida que aumenta  $Y_p$ , hasta adquirir un perfil cercano a la conducción pura en  $Y_p = 1$  (Kim y Hjun, 2004), debido a que el producto  $RaDa$  es igual a 0.1.

### 3.5 Transferencia global de calor

Para definir el número de Nusselt y debido al problema de establecer una diferencia de temperaturas para calcular el calor transferido, se decidió utilizar la diferencia entre la temperatura promedio  $T_{med}$  en la cavidad y la temperatura fría  $T_c$ . Entonces, a partir de un balance global de energía, se calcula el número de Nusselt promedio, el que está definido por:

$$Nu_{med} = \frac{Y_p S_0 - \int_{Y_p}^1 \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=0} dY - R_k \int_0^{Y_p} \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=0} dY}{\theta_{med}} \tag{14}$$

Los valores de  $\theta_{max}$ ,  $\theta_{med}$  y  $Nu_{med}$  para las simulaciones de la Tabla 2, se presentan en la Tabla 3. Los números de Nusselt presentan comportamiento monótono en el bloque de simulaciones que evalúan el efecto de  $Ra$  y de  $Y_p$  (12 a 16). En el caso de las simulaciones que evalúan el efecto de  $S_0$  y  $Da$  (1 a 11), se observa que  $Nu_{med}$  es directamente proporcional a  $S_0$  e inversamente proporcional al número de Darcy. Con fines de cuantificar las tendencias antes mencionadas, se correlacionaron los resultados de la Tabla 3, obteniendo la siguiente expresión:

$$Nu_{med} = 0.0014384 Ra^{0.03641} (S_0 + 1.9063)^{0.22441} Da^{-0.018634} (Y_p + 8.6974)^{4.6211} \tag{15}$$

Cuyo rango de validez es:  $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ ;  $0 \leq S_0 \leq 50$ ;  $10^{-8} \leq Da \leq 10^{-4}$  y  $0.25 \leq Y_p \leq 1$ .

La Ec. (15) se obtuvo mediante mínimos cuadrados con un error relativo promedio de 6.27 % y un error máximo de 14.204 %. Es importante mencionar que la Ec. (15) solamente trata de representar un comportamiento complejo ya que, en algunas situaciones, se presenta flujo bicelular, lo que requiere un análisis más detallado.

### 3.6 Cálculo con el método de dos dominios

Con fines de exploración, se repitieron varias simulaciones con el método de dos dominios, utilizando la condición de frontera de Beavers y Joseph (1967), con un valor del coeficiente empírico  $\gamma$  igual a 10. La comparación de las líneas de corriente y de las isothermas para la simulación 2, se ilustra en la Fig. 9, en donde se observa que, prácticamente, las líneas de corriente y las isothermas son similares. Para validar esta afirmación, se calculó el  $Nu_{med}$  que dio un valor de 15.457 contra un valor de  $Nu_{med}$  de 14.820 obtenido por el método de un solo dominio. Evidentemente es posible obtener resultados con mayor concordancia, haciendo un análisis de sensibilidad con el parámetro empírico de Beavers y Joseph (1967), lo que se convierte en una desventaja, ya que hay que conocer previamente el orden de magnitud de dicho parámetro antes de efectuar cualquier simulación. Cabe mencionar que si se utiliza la modelación de los dos dominios con la ecuación de Darcy con la extensión de Brinkman, no es necesario utilizar parámetros empíricos.

### 3.7 Comparación del método del parámetro binario con el método de dos dominios

Para valorar la eficiencia del Método del Parámetro Binario, se tomó el problema de convección natural reportado por Singh y col. (1993), en una cavidad

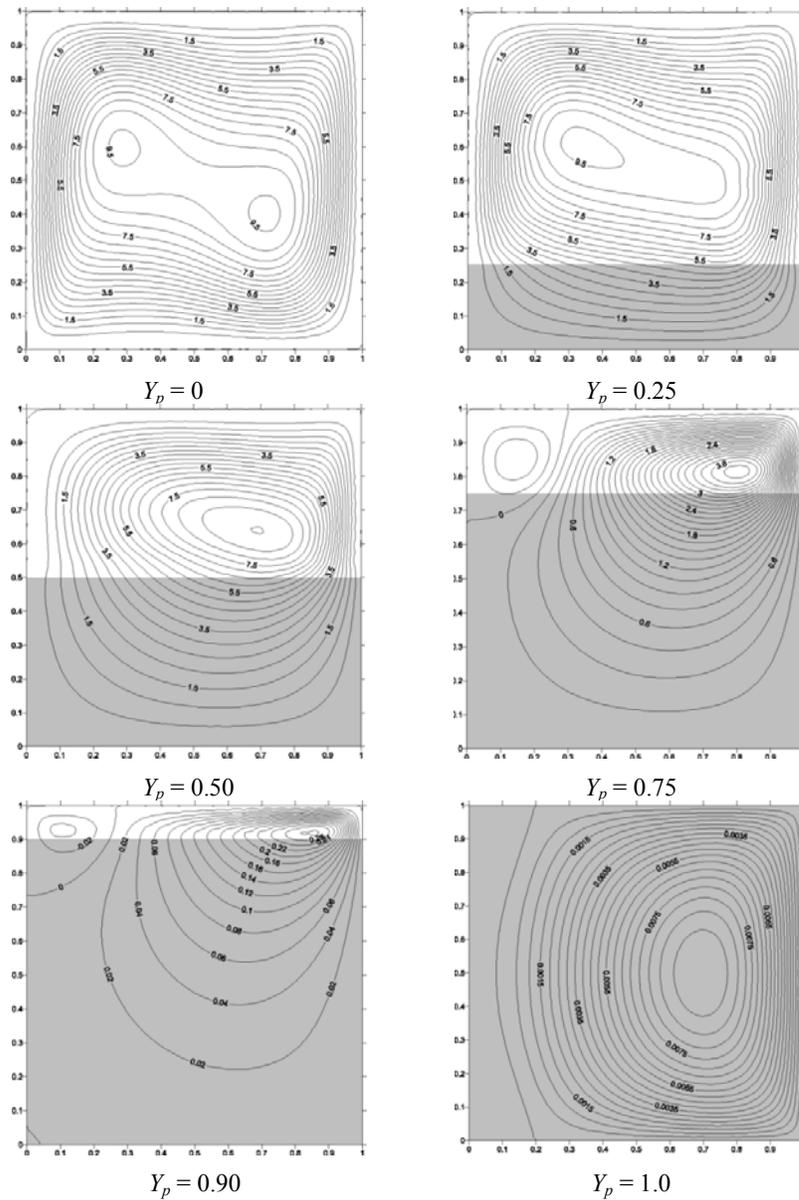


Fig. 7. Efecto de la posición de la interfase  $Y_p$  sobre las líneas de corriente a  $Ra = 10^5$ ,  $S_0 = 30$  y  $Da = 10^{-6}$ .

Tabla 4. Datos de  $Ra$  y  $Da$  tomados de Singh y col. (1993), para  $R_k = 1$  y  $Y_p = 0.5$ , iteraciones de Newton,  $Nu_{med}$  calculado y  $Nu_{med}$  reportado por los autores.

Simulación	$Ra$	$Da$	Factor de amortiguamiento	Iteraciones	$Nu_{med}$ calculado	$Nu_{med}$ Singh <sup>a</sup> y col. (1993)
1a	$10^4$	$10^{-5}$	1.0	6	1.474	1.429
1b	$10^5$	$10^{-5}$	0.5	38	3.228	3.173
1c	$10^6$	$10^{-6}$	0.5	51	6.009	6.269
2a	$10^4$	$10^{-4}$	1.0	6	1.487	1.433
2b	$10^5$	$10^{-4}$	0.5	37	3.288	3.233
2c	$10^6$	$10^{-5}$	0.5	47	6.114	6.307
3a	$10^4$	$10^{-3}$	1.0	6	1.587	1.538
3b	$10^5$	$10^{-3}$	0.5	37	3.689	3.618
3c	$10^6$	$10^{-4}$	0.5	49	6.581	6.563

<sup>a</sup> Se tomó el número de Nusselt reportado a la malla más fina.

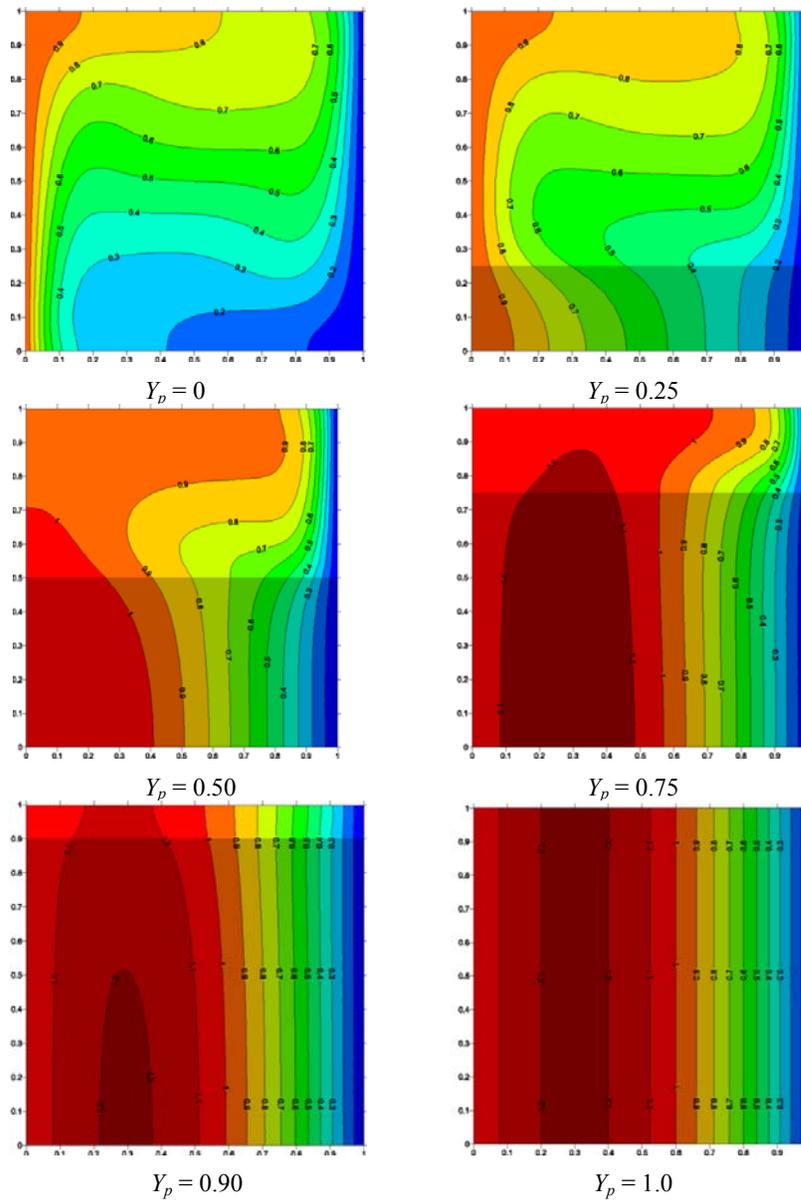


Fig. 8. Efecto de la posición de la interfase  $Y_p$  sobre las isothermas a  $Ra = 10^5$ ,  $S_0 = 30$  y  $Da = 10^{-6}$ .

Tabla 5. Efecto del tamaño de malla sobre el % de error en el balance global de energía y en el  $Nu$  promedio, para los datos de la simulación 11 ( $Ra = 10^6$ ,  $S_0 = 50$ ,  $Da = 10^{-8}$ ,  $Y_p = 0.5$ )

Método	Malleo	$\phi$ máximo	$\theta$ máximo	% Error b. e.	$Nu_{med}$
CO	21x21	25.189	1.209	11.36	18.282
CO	31x31	17.673	1.245	1.49	23.278
CO	41x41	17.232	1.235	1.25	22.983
CO	51x51	17.232	1.235	0.96	23.136
DF	21x21	27.371	1.558	24.47	19.367
DF	31x31	24.517	1.213	9.37	21.156
DF	41x41	20.363	1.224	5.66	21.839
DF	51x51	18.661	1.255	2.43	22.485
DF	81x81	17.739	1.244	1.27	23.056

cúbica compuesta de un medio poroso y un fluido colocados en forma horizontal, a la cual se le aplica un gradiente de temperatura en dos caras verticales

opuestas, mientras que las cuatro restantes se mantienen aisladas. Estos autores resuelven el problema mediante el modelo de dos dominios con

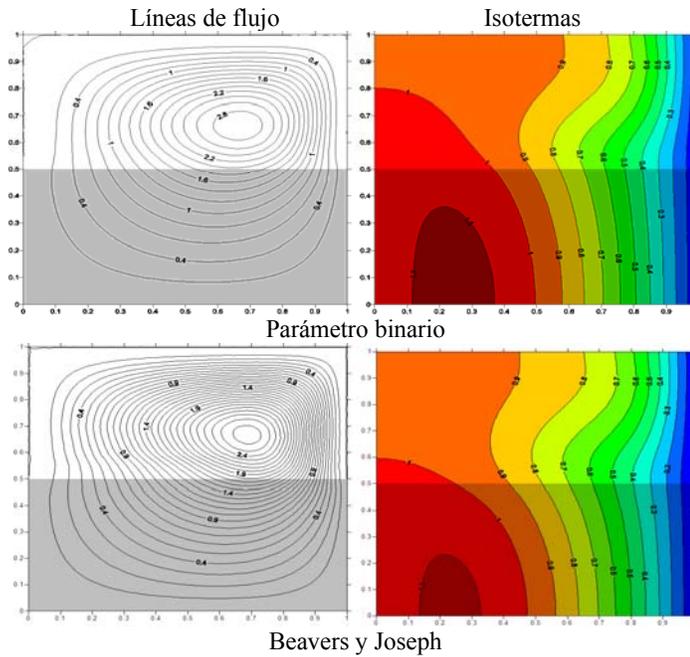


Fig. 9. Comparación de las soluciones obtenidas con los métodos del parámetro binario y la condición frontera de Beavers y Joseph respectivamente, para  $Ra = 10^4$ ,  $S_0 = 30$ ,  $Da = 10^{-6}$ ,  $Pr = 0.71$ ,  $Yp = 0.5$  y  $R_k = 6$ .

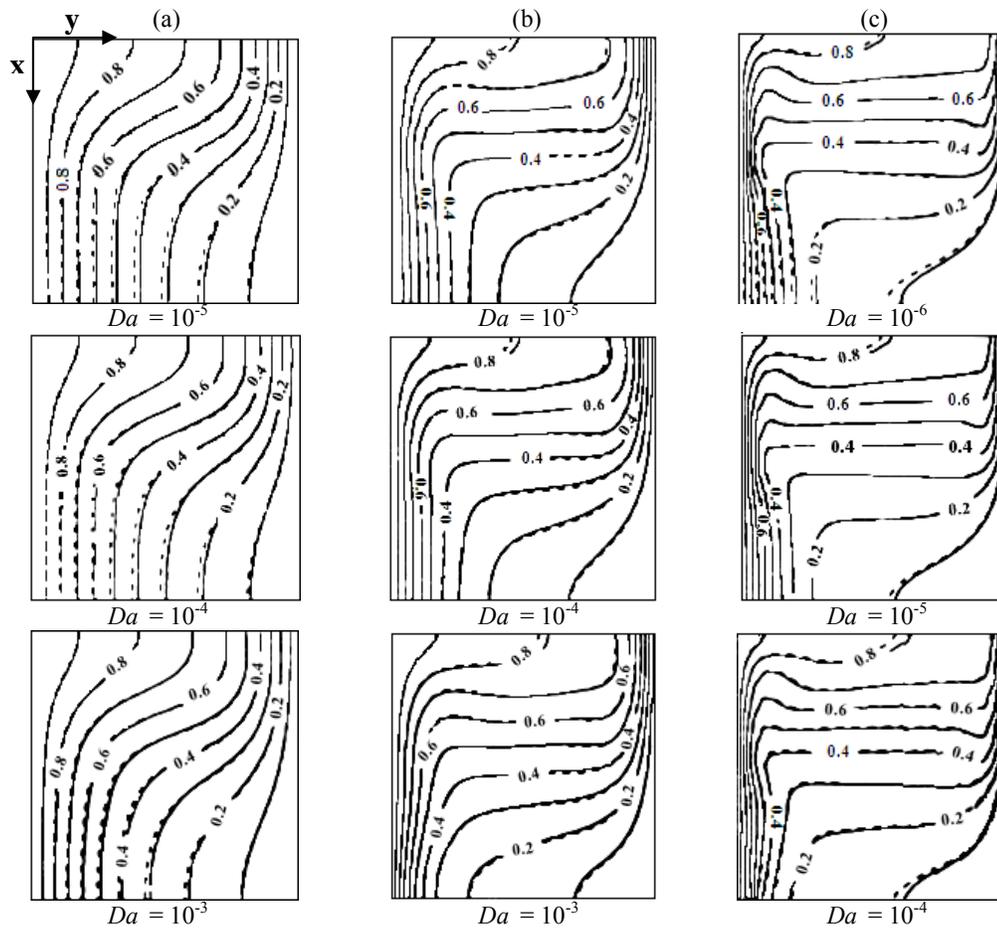


Fig. 10. Isotermas para  $R_k = 1$  en el plano  $z = 0.5$  reportadas por Singh y col. (1993). a)  $Ra = 10^4$ , b)  $Ra = 10^5$  y c)  $Ra = 10^6$  (Nota: Línea continua=solución 3-D; línea discontinua=solución 2-D).

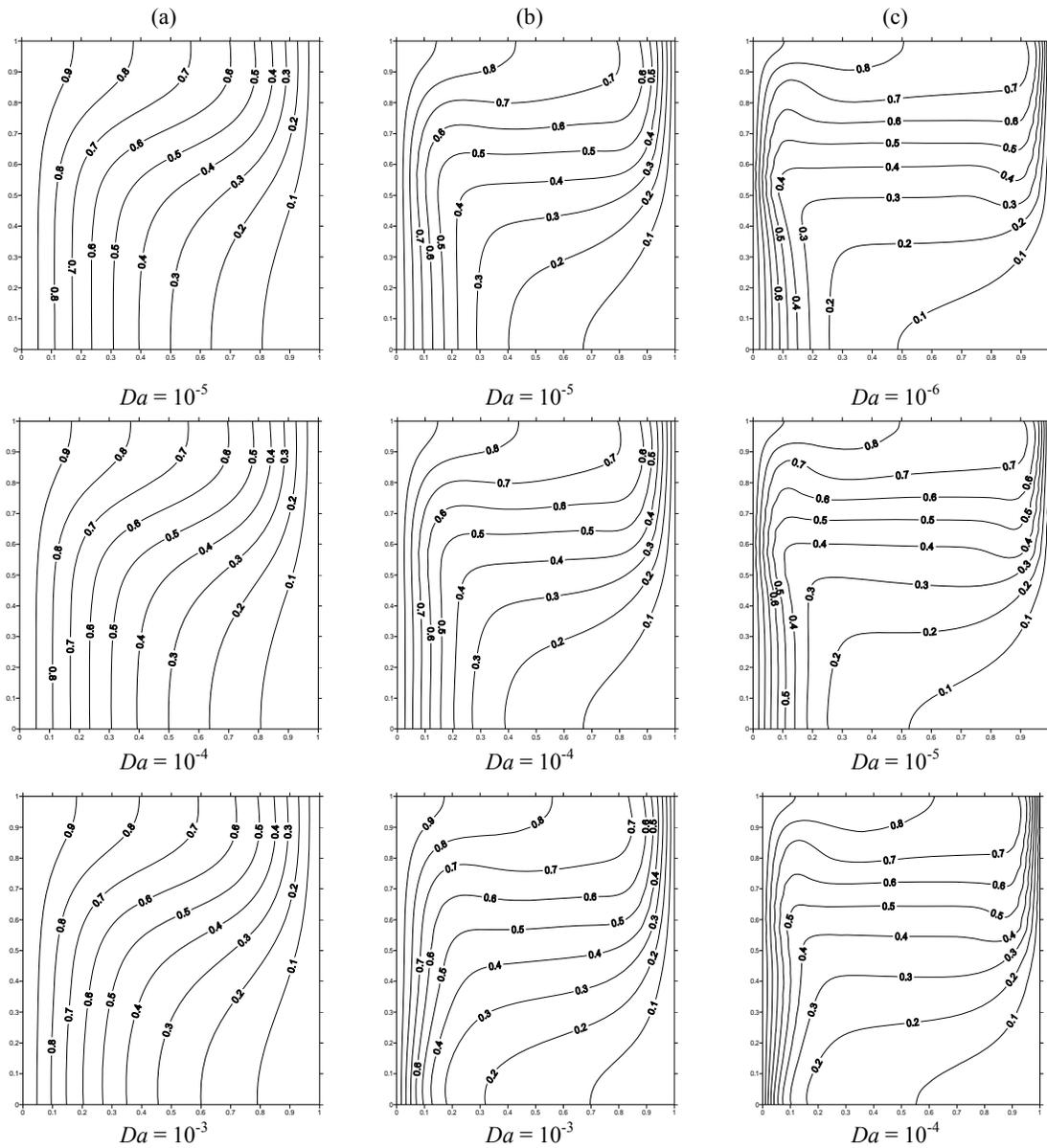


Fig. 11. Isothermas para  $R_k=1$  obtenidas a partir del método del parámetro binario, con los datos reportados por Singh y col. (1993). a)  $Ra = 10^4$ , b)  $Ra = 10^5$ , c)  $Ra = 10^6$ .

condiciones de acoplamiento interregional para la velocidad, temperatura y esfuerzo para las simulaciones mostradas en la Tabla 4. Las isothermas tomadas del trabajo de Singh y col. (1993), se muestran en la Fig. 10, mientras que las isothermas calculadas con el método del parámetro binario se ilustran en la Fig. 11, observándose la buena concordancia que existe entre ellas, lo que ratifica la confiabilidad de este método. Para validar esta observación, se ha incluido en la Tabla 4, la comparación de los números de Nusselt promedio en la pared caliente, tanto los calculados en este trabajo como los reportados por Singh y col. (1993). Es importante mencionar que Singh y col. (1993), resuelven el problema desde el punto de vista 3-D y 2-D, aunque las isothermas de la Fig. 11 para ambas

situaciones, prácticamente coinciden, debido a que las cuatro caras laterales de la cavidad están aisladas. Recientemente, Gobin y Goyeau (2008) y Hirata y col. (2007a, 2007b, 2009) establecen que las formulaciones de un solo dominio y la de dos dominios son equivalentes empleando la ley de Darcy con la extensión de Brinkman, en lugar de la Ley de Darcy, lo que concuerda con los resultados de este estudio, por lo que el enfoque de un solo dominio también es aplicable a problemas en donde exista generación de calor.

### 3.8 Efecto del malleo sobre la precisión del método numérico.

Para valorar el efecto del malleo sobre la precisión del método de colocación ortogonal y el valor del  $Nu_{med}$ , se tomaron los datos de la simulación 11, que fue la que presentó mayor esfuerzo computacional, con varios tamaños de malla. Además, se hizo una comparación con el método de Diferencias Finitas Centrales de segundo orden con malleo constante. Los resultados se ilustran en la Tabla 5, en donde se vuelve a ratificar que el método de Colocación Ortogonal requiere de un malleo de 2 a 3 veces más pequeño que el requerido por el método de Diferencias Finitas (Jiménez Islas, 1999), con el fin de obtener una precisión similar. La precisión del método de colocación ortogonal se evaluó mediante un balance global de energía que consiste en comparar el calor generado con la suma vectorial de los flujos de calor en cada una de las superficies de la cavidad (Jiménez Islas, 1999), observándose que, con colocación ortogonal, se obtiene errores más pequeños que con el método de diferencias finitas. De lo anterior, se concluye que el malleo de colocación seleccionado para este problema fue adecuado ya que los resultados presentados tienen independencia del tamaño de malla.

### Conclusiones

El método del parámetro binario o de un solo dominio es una buena aproximación para resolver el problema de la cavidad con interfase fluido-medio poroso con generación de calor, ya que solamente es necesario resolver 3 ecuaciones diferenciales parciales en vez de 5 ó 6 que se requieren resolver con el método de dos dominios, con el consiguiente ahorro computacional, además que no requiere de especificar las condiciones de acoplamiento fluido-medio poroso. Por otra parte, es importante mencionar que, en iguales condiciones, el método de colocación ortogonal tiene mayor precisión que el de diferencias finitas, ya que la discretización se hace en todo el dominio, por lo que lo convierte en una técnica eficiente para la solución de ecuaciones diferenciales parciales.

El efecto de las fuerzas de flotación originadas por la acción combinada del número de Rayleigh y de la fuente volumétrica de calor es más intenso en el fluido que en el medio poroso. El número de Nusselt promedio presenta una dependencia compleja de las variables  $Ra$ ,  $S_0$ ,  $Da$  y  $Y_p$ , debido a la aparición en algunos casos, de flujos bicelulares, siendo más significativos, los efectos de  $S_0$  y  $Ra$ , mientras que el efecto del número de Darcy es poco significativo.

### Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) mediante el Proyecto SEP-2004-CO1-46230.

### Nomenclatura

<b>C</b>	tensor de permeabilidades del medio poroso, $m^2$
$C_p$	calor específico, J/kg K
$Da$	número de Darcy, $K/L^2$
<b>g</b>	aceleración de la gravedad, $m^2/s$
$h$	altura del medio poroso en la cavidad, m
$h_c$	coeficiente global de transferencia de calor por convección, $W/m^2 K$
<b>K</b>	tensor de conductividades térmicas efectivas del medio poroso, $W/m K$
$K$	permeabilidad del medio poroso, $m^2$
$k$	conductividad térmica del fluido, $W/m K$
$L$	longitud de la cavidad, m
$M_p$	parámetro binario
NQ	número de ecuaciones
NX	puntos de colocación interior en la dirección $X$
NY	puntos de colocación interior en la dirección $Y$
$Nu$	número de Nusselt, $h_c L/k$
$Pr$	número de Prandtl, $C_p \mu/k$
$p$	presión, Pa
$Q_0$	generación volumétrica de calor, $W/m^3$
$Ra$	número de Rayleigh para un fluido, $g\rho\beta L^3(T_h - T_c)/(\mu\alpha)$
$R_k$	razón de conductividades medio poroso/fluido, $k_{eff}/k$
$S_0$	generación de calor adimensional, $Q_0 L^2/k(T_h - T_c)$
$T$	temperatura, K
$u$	velocidad adimensional, $vL/\alpha$
$v$	velocidad del fluido, m/s
$X$	longitud adimensional, $x/L$
$Y$	altura adimensional, $y/L$
$Y_p$	altura adimensional de la capa porosa, $h/L$
$x$	abscisa, m
$y$	ordenada, m

### Símbolos griegos:

$\alpha$	difusividad térmica del medio poroso, $m^2/s$
$\beta$	coeficiente de expansión volumétrica del fluido, $1/K$
$\gamma$	coeficiente empírico de Beavers y Joseph, $1/m$
$\theta$	temperatura adimensional, $(T - T_c)/(T_h - T_c)$
$\lambda$	factor de amortiguamiento del método de Newton-Raphson
$\mu$	viscosidad del fluido, $kg/m s$
$\mu'$	viscosidad aparente, $kg/m s$
$\rho$	densidad del fluido, $kg/m^3$
$\phi$	función corriente adimensional
$\omega$	vorticidad adimensional

### Subíndices:

$\beta$	región bifásica
c	pared fría
eff	medio efectivo

h pared caliente  
med valor promedio

### Referencias

- Alazmi, B. y Vafai, K. (2001). Analysis of fluid flow and heat transfer interfacial conditions between a porous medium and a fluid layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46 (44), 1735-1749.
- Basu, A. J. y Khalili, A. (1999). Computation of flow through a fluid-sediment interface in a benthic chamber. *Physics of Fluids* 11 (6), 1395-1405.
- Beavers, G.S. y Joseph, D.D. (1967). Boundary conditions at a naturally permeable wall. *Journal of Fluid Mechanics* 30, 197-207.
- Beckermann, C., Ramadhyani, S. y Viskanta, R. (1987). Natural convection flow and heat transfer between a fluid layer and a porous layer inside a rectangular enclosure. *Journal of Heat Transfer* 109, 363-371.
- Bird, R. B., Stewart, W. E. y Lightfoot, E. N. (2002). *Transport Phenomena*. 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley & Sons Inc. USA.
- Brinkman, H.C. (1947). On the permeability of media consisting of closely packed porous particles. *Applied Science and Research* A1, 81-86.
- Carbonell, R. G. y Whitaker, S. (1984). Heat and mass transport in porous media. In *Mechanics of Fluid in Porous Media*. J. Bear and Corapcioglu, M. Y. Eds. Martinus Nijhoff, Brussels, 121-198.
- Chandesris, M. y Jamet, D. (2006). Boundary conditions at a planar fluid-porous interface for a Poiseuille flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49 (13-14) 2137-2150.
- Das, S. y Sahoo R.K. (1999). Effect of Darcy, fluid Rayleigh and heat Generation parameters on Natural Convection in a Porous Square Enclosure: A Brinkman-Extended Darcy model. *International Communications in Heat and Mass Transfer* 26, 569-578.
- Deng, C. y Martinez, D. M. (2005). Viscous flow in a channel partially filled with a porous medium and with wall suction. *Chemical Engineering Science* 60(2), 329-336.
- Finlayson, B. A. (1980). *Nonlinear Analysis in Chemical Engineering*. McGraw-Hill Book Co. USA. 366 p.
- Kim, G.B. y Hyun, J. M. (2004). Buoyant convection of a power-law fluid in an enclosure filled with heat-generating porous media. *Numerical Heat Transfer A*. 45(6), 569-582.
- Gobin, D., Goyeau, B. y Songbe, J. P. (1998). Double diffusive natural convection in a composite fluid-porous layer. *Journal of Heat Transfer* 120(1), 234-242.
- Gobin, D., Goyeau, B. y Neculae, A. (2005). Convective heat and solute transfer in partially porous cavities. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 48, (10), 1898-1908.
- Gobin, D. y Goyeau, B. (2008). Natural convection in partially porous media: A brief overview. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow* 18(3-4), 465-490.
- Goyeau, B., Lhuillier, D., Gobin, D. y Velarde, M. G. (2003). Momentum transport at a fluid-porous interface. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46(21), 4071-4081.
- Hirata, S. C., Goyeau, B., Gobin, D. y Cotta, R. M. (2006). Stability of natural convection in superposed fluid and porous layers using integral transforms. *Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals* 50(5), 409-424.
- Hirata, S.C., Goyeau, B. y Gobin, D. (2007a). Stability of natural convection in superposed fluid and porous layers: Influence of the interfacial jump boundary condition. *Physics of Fluids* 19, (5), 058.
- Hirata, S.C., Goyeau, B., Gobin, D., Carr M. y Cotta R.M. (2007b). Lineal stability of natural convection in superposed fluid and porous layers: Influence of the interfacial modeling. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 50, 1356-1367.
- Hirata, S.C., Goyeau, B., Gobin, D., Chandresris M. y Jamet D. (2009). Stability of natural convection in superposed fluid and porous layers: Equivalence of the one- and two-domain approaches. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52, 533-536.
- Jiménez-Islas, H. (1999). *Modelamiento Matemático de la Transferencia de Momentum, Calor y Masa en Medios Porosos*. Tesis Doctoral. UAM, México D.F.
- Jiménez-Islas, H., Navarrete-Bolaños, J.L. y Botello-Álvarez, E. (2004). Estudio numérico de la convección natural de calor y masa 2-D en granos almacenados en silos cilíndricos / numerical study of the natural convection of heat and 2-D mass of grain stored in cylindrical silos. *Agrociencia* 38, 325-342.
- Jiménez-Islas, H. y López-Isunza F. (1996). PARCOL2: Programa para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas no lineales, por doble colocación ortogonal. *Avances en Ingeniería Química* 6 (2), 168-173.
- Jiménez-Islas, H., López-Isunza, F. y Ochoa-Tapia, J. A. (1999). Natural convection in a cylindrical porous cavity with internal heat source: a numerical study with Brinkman-extended Darcy model. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 42, 4185-4195.
- Jiménez-Islas, H., Magaña-Ramírez, J. L. y Torregrosa-Mira A. (1996). Efecto del calor de respiración sobre la convección natural en el almacenamiento de granos en silos. Memorias VI Congreso Nacional de la

- Asociación Mexicana de Ingeniería Agrícola, México.
- Jue, T.C. (2003). Analysis of thermal convection in a fluid-saturated porous cavity with internal heat generation. *Heat and Mass Transfer* 40, 83-89.
- Ochoa-Tapia, J.A. y Whitaker, S. (1995). Momentum-transfer at the boundary between a porous-medium and a homogeneous fluid .1. Theoretical development. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 38, 2635-2646.
- Ochoa-Tapia, J. A. y Whitaker, S. (1997). Heat transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 40, 2691-2707.
- Neale, G. y W. Nader, W. (1974). Practical significance of Brinkman's extension of Darcy's Law. *Canadian Journal of Chemical Engineering* 52, 475-478.
- Nield, D.A. y Bejan, A. (1999). *Convection In Porous Media*. 2<sup>nd</sup> Edition. Springer-Verlag, USA.
- Prasad, V. y Chui, A. (1989). Thermal convection in a cylindrical porous enclosure with internal heat generation. *Journal of Heat Transfer* 111, 916-925.
- Roache, P. J. (1972). *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa Publishers. Albuquerque, N. M. USA.
- Saito, T. y Hirose, K. (1989). High-accuracy benchmark solutions to natural convection in a square cavity. *Computational Mechanics* 4, 417-427.
- Singh, A.K., Leonardi, E. y Thorpe, G.R. (1993). Three-Dimensional natural convection in a confined fluid overlying a porous layer. *Journal of Heat Transfer* 115, 631-638.
- Thorpe, G.R., Ochoa-Tapia, A. y Whitaker, S. (1991). The Diffusion of Moisture in Food Grains - I. The Development of a Mass Transport Equation. *Journal of Stored Products Research* 27,1-9.
- Valdés-Parada, F. J., Goyeau. B. y Ochoa-Tapia, J. A. (2006). Diffusive mass transfer between a microporous medium and an homogeneous fluid: Jump boundary conditions. *Chemical Engineering Science* 61(5), 1692-1704.
- Valencia-López, J. J., Espinosa-Paredes, G. y Ochoa-Tapia, J. A. (2003). Mass transfer jump condition at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. *Journal of Porous Media* 6 (1), 33-49.
- Whitaker, S. (1986). Flow in porous media I: a theoretical derivation of Darcy's law. *Transport in Porous Media* 1, 3-25.
- Whitaker, S. (1999). *The Method of Volume Averaging*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands.